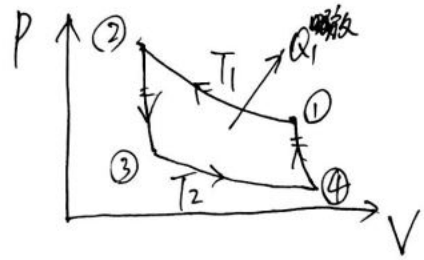
第二次热学小测答案

1.（本题5分）

卡诺制冷仍然是2个等温过程和2个绝热过程构成，不过此过程是一个逆时针循环。



1到2等温压缩，$\Delta U_{12} = Q_{12} + W_{12} = 0$，且$V_1 > V_2$：

$$W_{12} = -\int_1^2 pdV = -\int_1^2 \frac{RT_1}{V} dV = -RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} > 0$$

$$Q_{12} = Q_{放} = -W_{12} = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} < 0$$

3到4等温膨胀，$V_4 > V_3$.

$$W_{34} = -RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} < 0$$

$$Q_{34} = Q_{吸} = -W_{34} = RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} > 0$$

而绝热过程，则有$Q_{41} = Q_{23} = 0$.

4到1：

$$T_2 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} = C_1$$

2到3：

$$T_2 V_3^{\gamma-1} = T_1 V_2^{\gamma-1} = C_2$$

两式相除，有：

$$\frac{V_4}{V_3} = \frac{V_1}{V_2}$$

所以循环过程做的总功为

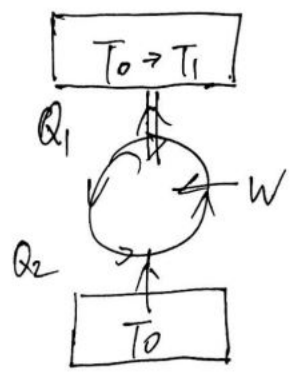
$$W_{loop} = -Q_{loop} = -(Q_{12} + Q_{34}) = R(T_1 - T_2)\ln\frac{V_1}{V_2} = R(T_1 - T_2)\ln\frac{V_4}{V_3}$$

则有

$$\epsilon = \frac{Q_2^{\text{吸}}}{W_{loop}} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

2.（本题10分）

冬季Carnot取暖。



在低温恒源时，$T_0 = 0$℃=273K；高温恒源，$T_1 = 293K$.

卡诺制冷机的效率为

$$\epsilon = \frac{đQ_2^{\text{吸}}}{đW_{loop}} = \frac{T_0}{T - T_0}$$

其中，根据能量守恒，有$đQ_2^{\text{吸}} = đQ_1 - đW$.所以，

$$\epsilon = \frac{đQ_1 - đW}{đW} = \frac{T_0}{T - T_0}$$

$$\Rightarrow T_0 đW = (T - T_0)đQ_1 + (T_0 - T)đW$$

$$\Rightarrow T đW = (T - T_0)đQ_1 = (T - T_0)C_p dT$$

所以，

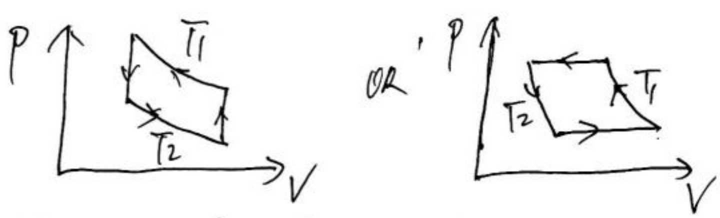
$$W = \int đW = \int_{T_0}^{T_1}(1 - \frac{T_0}{T})C_p dT = C_p(T - T_0\ln T)|_{T_0}^{T_1}$$

$$= C_p\Delta T - T_0\ln\frac{T_1}{T_0} = 20C_p - 273\ln\frac{293}{273}$$

3.（本题10分）

冬季降温时，对体系做功为$W > 0$, 从高温热源T_1吸热$Q_1 > 0$，向低温热源放热为$Q_2 < 0$.

,



I.根据热力学第一定律，$\Delta U_{loop} = 0 \Rightarrow |Q_2| = W + Q$;

II.外界对体系做正功$W > 0$，逆时针循环;

III.$T_1 > T_2$，等温线T_1在T_2上方。

那么在高温过程中，等效压缩$V_{T_1}^{初} > V_{T_2}^{末}$.

又因为，$Q_{T_1} = -W_{T_1} = \int_{初}^{末} pdV = RT_1 \ln \frac{V_{T_1}^{末}}{V_{T_1}^{初}} < 0$，也就是说高温为放热$Q_{T_1} < 0$的过程，和要求的$Q_{T_1} > 0$不符。矛盾!

同理可证明，在低温过程中，也只能是$Q_{T_2} > 0$的过程，与要求的$Q_{T_2} < 0$矛盾。

所以无法通过对经典热力学的热机循环做功，即从高温热源热源中吸热，向低温热源放热。

4.（本题10分）已知，理想气体经历了某一准静态过程，其过程热容为：

$$C_{l,m} = C_{0,m} - \frac{a}{T^2}$$

其中，$a, C_{0,m}$均可以视为常数。试求此过程的状态方程。

解：根据热力学第一定律，我们首先有：

$$\nu C_{V,m}dT = dU = đQ - pdV \qquad (3分)$$

然后，由于$đQ = \nu C_{l,m}dT = \nu C_{0,m}dT - \frac{\nu a}{T^2}dT$, 我们可以得到：

$$\nu C_{V,m}dT = \nu C_{0,m}dT - \frac{\nu a}{T^2}dT - pdV$$

$$\nu C_{V,m} = \nu C_{0,m} - \frac{\nu a}{T^2} - p(\frac{\partial V}{\partial T})_l \qquad (2分)$$

而由于我们有理想气体的状态方程$pV = \nu RT$, 所以在此过程中有

$$(\frac{\partial V}{\partial T})_l = \frac{dV}{dT}$$

因此，可以得到：

$$[\nu(C_{V,m} - C_{0,m}) + \frac{\nu a}{T^2}]\frac{dT}{T} = -\frac{\nu R}{V}dV \qquad (2分)$$

$$\int [(C_{V,m} - C_{0,m}) + \frac{a}{T^2}]\frac{dT}{T} = -\int \frac{R}{V}dV$$

$$(C_{V,m} - C_{0,m})\ln\frac{T}{T_0} - \frac{a}{2}(\frac{1}{T^2} - \frac{1}{T_0^2}) = -R\ln\frac{V}{V_0}$$

即：

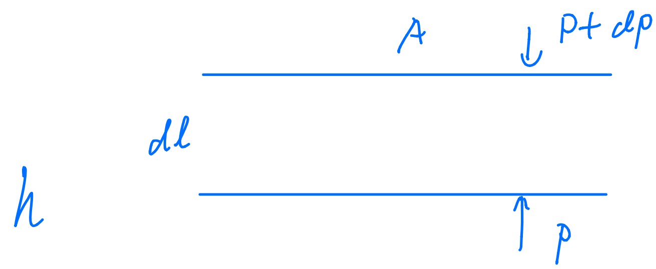
$$(C_{V,m} - C_{0,m})\ln T - a\frac{1}{2T^2} + R\ln V = Const$$

$$T^{C_{V,m}-C_{0,m}}e^{-\frac{a}{2T^2}}V^R = C \qquad (3分)$$

5.（本题15分）

解：

(1)根据等温大气模型：



由力学平衡条件，有：

$$Adp = -Adh \cdot \rho g$$

$$\Rightarrow dp = -\rho g dh = -nmgdh \qquad (2\text{points})$$

在等温模型下，$p = nk_BT_c$，于是：

$$dp = -\frac{p}{k_BT_c} \cdot mgdh \Rightarrow p = p_0 e^{-\frac{mgh}{k_BT_c}} \qquad (3\text{points})$$

(2)绝热大气模型，类似于上一问，有：

$$\frac{dp}{dh} = -nmg = -\frac{p}{kT}mg$$

对于理想气体的绝热过程，有$pV^\gamma = Const \Rightarrow T^{-\gamma}p^{\gamma-1} = Const$.所以：

$$\frac{dT}{dp} = \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{T}{p} \qquad (2\text{points})$$

又因为$\frac{dT}{dh} = \frac{dT}{dp}\frac{dp}{dh} = -\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{m}{k}g$.所以：

$$T = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \frac{mg}{k}h + T_0 \qquad (3\text{points})$$

(3)根据绝热大气模型，令$\lambda = -\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{mg}{k}$，

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{p}{k(T_0+\lambda h)}mg$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{mgd(T_0 + \lambda h)}{\lambda(T_0 + \lambda h)k}$$

$$\Rightarrow p = p_0(1 + \frac{\lambda k}{T_0})^{-\frac{mg}{\lambda k}} \qquad \text{(5points)}$$